

# Allenamenti di matematica: Simulazione di Gara

12 dicembre 2014

Le risposte vanno indicate con una sequenza di 4 cifre; se la risposta contenesse più di 4 cifre, andranno indicate solo le ultime 4. Se la risposta contenesse meno di 4 cifre è necessario anteporre la cifra 0 quante volte occorre.

Approssimazioni utili:  $\sqrt{2} = 1.4142$ ,  $\sqrt{3} = 1.7321$ ,  $\sqrt{5} = 2.2361$ ,  $\sqrt{7} = 2.6458$ ,  $\pi = 3.1416$ .

1. **Giardino di lusso.** Il signor Giorgio possiede un vasto giardino quadrato il cui lato misura 100 m. Nell'angolo vi è una piscina circolare, tangente a due lati del giardino. Per il suo compleanno vuole rendere ancora più lussuoso il suo possedimento aggiungendo due piscine. Il suo architetto di fiducia nota con sorpresa che è possibile aggiungere due piscine identiche a quella che già c'è in modo che siano tangenti ciascuna ad uno degli altri due lati del giardino e in maniera tale che ogni piscina sia tangente alle altre. Quanti metri misura il raggio di tali piscine? Scrivere il risultato utilizzandone le prime quattro cifre significative.
2. **La slot-machine.** Il signor Giorgio è davvero ricchissimo. Per questo motivo spreca spesso soldi alla sua slot-machine di fiducia. La probabilità di vincere ad ogni giocata è  $\frac{1}{5}$  se alla giocata precedente il giocatore non ha vinto, ed è  $\frac{1}{10}$  se alla giocata precedente il giocatore ha vinto. Giorgio vede un tizio giocare prima di lui due volte consecutive accorgendosi che la prima delle due volte non ha vinto, ma non riuscendo a vedere il risultato della sua ultima giocata. Giorgio decide di giocare tre volte consecutivamente. Qual è la probabilità che vinca almeno in due casi? Esprimere il risultato come somma di numeratore e denominatore della frazione ottenuta, dopo averla ridotta ai minimi termini.
3. **Geometria al bar.** Benny e Greta si trovano al Solido-Bar tutte le mattine per fare colazione. Le tazze in cui viene servito loro il cappuccino sono ottenute sezionando superfici sferiche aventi raggio di 5 cm con due piani paralleli, uno dei quali passante per il centro della sfera. La distanza tra i due piani è di 4 cm. Benny, che al mattino presto si interroga spesso su importanti quesiti della vita, si chiede quale possa essere il volume delle tazze, in  $\text{cm}^3$ . Greta, dopo un rapido calcolo, le risponde molto brillantemente. Indicare la parte intera del volume delle tazze.
4. **Produzioni Santa&Lucia.** Presso le fabbriche Santa&Lucia la catena di produzione dei regali è costituita da tre reparti  $A$ ,  $B$  e  $C$ . A seconda del tipo ogni regalo può passare in nessuno oppure qualcuno di essi. Inoltre, è noto che:
  - nessun tipo di regalo passa in tutti e tre i reparti;
  - almeno un tipo di regalo passa sia nel reparto  $A$  sia nel reparto  $B$ ;
  - almeno un tipo di regalo passa sia nel reparto  $A$  sia nel reparto  $C$ ;

Sapendo che vengono prodotti  $n$  tipi differenti di regali, si indichi con  $M(n)$  il numero di modi diversi in cui i regali possono venire lavorati all'interno della fabbrica. Si fornisca come risposta il più grande valore di  $M(n)$  minore di 10000.

5. **Reparto spedizioni.** Il braccio robotizzato del reparto spedizioni è impazzito. Davanti a sé ha 3 scatole, ognuna contenente un regalo. Per 5 volte di fila preleva un regalo da una scatola e lo posa in un'altra (anche se quest'ultima è già piena). Qual è la probabilità che al termine della procedura ogni scatola contenga ancora un solo regalo? Si fornisca come risultato la somma del numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.
6. **Ultima chance.** Santa Lucia è troppo buona e, anche se quest'anno vi siete comportati male, vi è data un'ultima possibilità di redimervi rispondendo al seguente quesito. In un sacchetto sono contenute 3 palline di tre colori diversi. Qual è la probabilità di estrarre 9 palline (con reimmissione) di esattamente due colori distinti? Si fornisca come risultato la somma del numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

7. **Il numero civico.** Nel suo viaggio per distribuire i doni Santa Lucia capita in una città con vie talmente lunghe che i numeri civici arrivano addirittura a essere costituiti da quattro cifre. Questo la colpisce a tal punto che si chiede quanti siano i numeri palindromi di 4 cifre divisibili per 3 o per 5. Dopo un po' risolve l'interrogativo. A che risposta è giunta Santa Lucia?
8. **L'abito di Santa Lucia.** Ogni anno Santa Lucia deve decidere se indossare il suo abito color celeste o quello color tortora. Per farlo segue un complesso rituale. In un'urna prepara 4 palline celeste e 6 palline tortora; estrae una pallina, la rimette nell'urna e tira un dado. Se ha pescato una pallina tortora inserisce nell'urna un numero di palline celeste pari al resto della divisione per 3 del punteggio ottenuto, se invece ha pescato una pallina celeste inserisce nell'urna un numero di palline celeste pari al resto della divisione per 2 del punteggio ottenuto. Poi estrae una pallina. Qual è la probabilità che Santa Lucia abbia pescato una pallina tortora? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ottenuta dopo aver semplificato tutti i fattori comuni.
9. **Quadrati inscritti.** Mentre aspetta che l'asinello si riposi dopo le ultime consegne, Santa Lucia prende un gessetto e traccia sull'asfalto di una strada quattro quadrati ciascuno dei quali è inscritto nel precedente e ha i vertici nei punti medi di ogni lato del quadrato precedente. Infine nel quarto quadrato iscrive una circonferenza. Si allontana dal disegno e lancia un sassolino cercando di farlo cadere nel cerchio. Considerando il sassolino come un punto, qual è la probabilità che Santa Lucia ci riesca, assumendo che riesca certamente a far cadere il sassolino nel quadrato più grande? Indicare come soluzione le prime quattro cifre non nulle dopo la virgola.
10. **L'indirizzo criptato.** Su una letterina arrivata a Santa Lucia è scritto di consegnare un dono al numero civico corrispondente al più piccolo numero intero positivo che ammette 12 divisori pari (positivi) e 6 divisori dispari (positivi). A quale numero deve consegnare il regalo?
11. **Propaganda.** Per assicurarsi la rielezione, il Sindaco di una città commissiona svariati regali a Santa Lucia. Il primo anno commissiona un solo regalo, mentre il secondo anno ne commissiona due. Negli anni successivi il Sindaco commissiona un numero di regali pari alla somma di quelli dei due anni precedenti, se quell'anno ci saranno le elezioni, mentre ne commissiona un numero pari alla differenza (in valore assoluto) di quelli dei due anni precedenti, se quell'anno non ci sono le elezioni. Negli ultimi due anni il Sindaco ha commissionato 64079 e 167761 regali.  
Sapendo che le elezioni avvengono ad anni alterni e che hanno avuto luogo l'anno in cui il Sindaco ha commissionato il primo regalo, si calcoli il numero totale di regali finora commissionati dal Sindaco. Dare come risposta le quattro cifre meno significative del totale.
12. **La torta sferica.** Cosa c'è di meglio di una torta di cioccolato sferica il giorno di Santa Lucia? Per glassare la torta ci sono voluti  $57\pi$  cm<sup>3</sup> di panna che hanno incrementato lo spessore della sfera di 3 cm. Si decide di tagliarla disegnando triangoli uguali sulla superficie glassata e congiungendo i loro vertici con il centro della sfera. Sapendo che si sono distribuite 12 fette, quanto misura l'area del triangolo disegnato sulla glassa relativo ad ogni singola fetta? Si diano come risposta le prime 4 cifre significative.
13. **L'asinello.** Santa Lucia è di fretta e il suo asinello deve cibarsi presso un qualsiasi punto di una mangiatoia lunga 4 metri. L'asinello si trova sulla retta perpendicolare alla mangiatoia passante per uno dei suoi vertici, a un metro da esso. Santa Lucia lo aspetta presso un punto giacente sulla perpendicolare alla mangiatoia passante per l'altro vertice a 2 metri da quest'ultimo (nello stesso semipiano, individuato dalla mangiatoia, in cui si trova l'asinello). Quanto misura la strada più breve che l'asinello deve percorrere per raggiungere Santa Lucia dopo essersi cibato presso la mangiatoia?
14. **I regali di Santa Lucia.** Luca adora scartare i regali di Santa Lucia, ma sa che, se vicino c'è suo fratello Andrea, tutto può trasformarsi in un indovinello matematico. Quest'anno Luca riceve una scatola di dieci aste di lunghezza intera diversa (da 1 a 10 cm) che possono essere assemblate lungo i loro vertici. Neanche il tempo di finire di scartare che Andrea si rivolge al fratello: "Mi sapresti dire quanti triangoli diversi non degeneri riusciresti a costruire?"

15. **La pista.** Un punto si muove a velocità (scalare) costante lungo una pista costituita da due circonferenze di raggio  $r$ , tangenti esternamente fra loro nel punto  $A$ , e da una terza circonferenza di raggio  $\frac{r}{2}$ , tangente alle precedenti nel medesimo punto (si intende, internamente all'una ed esternamente all'altra). Sono noti i seguenti fatti:
- (a) il punto transita in  $A$  all'istante zero;
  - (b) il punto impiega un secondo per percorrere interamente la circonferenza più piccola;
  - (c) ogni volta che il punto transita in  $A$ , v'è la stessa probabilità che prosegua sulla minore delle tre circonferenze piuttosto che sulla maggiore alla quale è tangente internamente la minore, mentre v'è il doppio della probabilità che esso prosegua sulla circonferenza maggiore alla quale è tangente esternamente la minore piuttosto che sulla minore.

Si determini la probabilità  $p$  che il punto si ritrovi nuovamente in  $A$  dopo 7 secondi (dall'istante zero) e, avendo espresso il valore trovato nella forma  $p = \frac{m}{n}$ , con  $(m, n) = 1$ , si fornisca come risultato la differenza  $n - m$ .

16. **Tazzine, piattini e cucchiaini.** In una scatola sono contenuti 3200 tazzine, 3000 piattini e 2300 cucchiaini. Qual è il minimo numero di oggetti che devono essere estratti (tutti assieme) dalla scatola per essere sicuri di poter formare, con questi, 1800 set da caffè completi, costituiti cioè da 1 tazzina, 1 piattino e 1 cucchiaino?
17. **Distanze.** Si consideri un triangolo di vertici  $A$ ,  $B$  e  $C$  con  $\overline{AB} = 23$ ,  $\overline{BC} = 75$  e  $\overline{CA} = 67$ . Si trovi un punto  $P$  su  $BC$  tale per cui coincidano le distanze  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  e, dopo aver espresso la lunghezza del segmento  $PA$  nella forma  $\overline{PA} = \frac{m}{n}$ , con  $(m, n) = 1$ , si fornisca come risultato la differenza  $m - n$ .
18. **Ben sveglia.** Durante la notte della consegna dei regali, Santa Lucia è costretta a bere parecchio caffè. Per non agitarsi troppo, la santa decide di berne un numero di tazzine pari a  $n/s(n)$ , dove  $n$  è l'anno in corso e  $s(n)$  è la somma delle cifre di  $n$ . In quali anni, dall'anno 1000 ad oggi, si è trovata a bere esattamente 112 tazzine di caffè? Si scriva come risposta la somma degli anni in questione.
19. **Decorando l'albero.** Una scatola contiene due tipi di palline dell'albero di Natale: 25 blu e 35 rosse. Un bambino estrae dalla scatola alcune palline, reinserendo ogni volta la pallina pescata. Qual è il numero minimo di estrazioni successive affinché la probabilità di estrarre almeno una pallina rossa sia maggiore di 0.99?
20. **Preferenze.** Su 1000 bambini di una scuola, 600 dichiarano di preferire Santa Lucia a Babbo Natale, mentre gli altri dichiarano di preferire Babbo Natale a Santa Lucia. Quando si è votato per decidere chi porterà i regali a scuola, quest'anno tutti i bambini hanno votato, ma 60 sostenitori di Santa Lucia hanno votato comunque per Babbo Natale e 50 sostenitori di Babbo Natale hanno votato per Santa Lucia. Se un bambino, scelto casualmente, ha votato per Santa Lucia, con che probabilità si tratta di un sostenitore di Babbo Natale? Esprimere il risultato come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.