

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul foglio delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$

*In a hole in the ground there lived a hobbit.
Not a nasty, dirty, wet hole, filled with the ends of worms and an oozy smell,
nor yet a dry, bare, sandy hole with nothing in it to sit down on or to eat:
it was a hobbit-hole, and that means comfort.*
(J.R.R. Tolkien, "The Hobbit")

Testi di Giovanni Paolini e Luca Ghidelli

30 novembre 2009

Gara a Squadre - Disfida di Mezzo - Testi

1. Andata e Ritorno [20 punti]

Il viaggio di Bilbo avviene 942 anni dopo la fondazione del regno dei nani presso la Montagna Solitaria ad opera di Thrain I, e 478 anni dopo il ritrovamento dell'Unico Anello da parte di Deagol. Le date di questi ultimi due eventi, inoltre, sommate danno come risultato 4462. In che anno Bilbo intraprende il suo viaggio?

2. Anelli di fumo [20 punti]

Bilbo e Gandalf amano fumare l'erbapipa. Una sera, seduti l'uno di fronte all'altro a 5 metri di distanza, nello stesso istante creano due anelli di fumo; quello di Bilbo si muove alla velocità di $1,12 \frac{m}{s}$ verso Gandalf, mentre quello di Gandalf si sposta alla velocità di $1,54 \frac{m}{s}$ verso Bilbo. Muovendosi i due anelli si dilatano delineando le forme di due coni; ad un certo punto gli anelli vanno a coincidere perfettamente e poi scompaiono. Sapendo che il cono formato dall'anello di Gandalf ha un volume di 7612 cm^3 , qual è il volume, in cm^3 , del cono formato dall'anello di Bilbo?

3. Vita da hobbit 1 [25 punti]

Dei 2009 abitanti di Hobbiville, è noto che 1437 fumano abitualmente l'erbapipa, e 1068 amano la birra. Inoltre il numero di hobbit che coltivano entrambe le abitudini è esattamente il doppio rispetto al numero di quelli che non hanno tra i propri interessi nessuno tra i due menzionati. Quanti sono gli hobbit a cui piacciono sia l'erbapipa che la birra?

4. Il volo delle aquile [25 punti]

Nell'ultima parte del lungo volo, l'aquila che sta trasportando il tremante Bilbo (dopo il rocambolesco salvataggio dagli orchi) comincia la discesa, in linea retta e obliquamente rispetto al terreno. Tra un battito d'ali e il successivo essa scende di 35 spanne di quota, e si avvicina in linea d'aria al punto di atterraggio di 91 spanne. Se all'inizio della discesa la sua ombra per terra distava 6912 spanne dalla meta (il sole si trovava esattamente sopra l'aquila), quanto spazio percorre durante l'intera discesa?

5. Una riunione inaspettata [30 punti]

I 13 nani della compagnia di Thorin entrano, uno alla volta, a casa di Bilbo, il quale li fa accomodare alla sua grande tavola rotonda che ha proprio 13 posti. Per primo entra Thorin, e poi seguono gli altri 12 in rigoroso ordine di età, dal più vecchio al più giovane. Thorin si siede in un posto qualsiasi, e ogni altro nano si siede sempre vicino a qualcuno che è già arrivato. In quanti modi si possono disporre i nani, contando una volta sola le configurazioni uguali a meno di rotazioni della tavola?

6. La spartizione dei beni

[30 punti]

Mentre Bilbo è in viaggio per compiere la sua pericolosa missione, a Hobbiville tutti danno ormai per certa la sua morte. Gli 11 avidi hobbit della famiglia Sackville-Baggins ne approfittano, spartendosi le sue 9923 monete d'oro; essi fanno in modo che tutti ne ricevano almeno 100, e che ognuno ottenga un numero di monete pari alla media aritmetica di quelle ottenute da altri due hobbit. Quante monete può ricevere al massimo uno di loro?

7. L'Ultima Casa Accogliente

[35 punti]

In una parte dell'enorme e splendida dimora di Elrond vi sono 97×97 sale disposte a quadrato, le cui porte sono collocate in modo da poter sempre passare da una sala ad una adiacente. Bilbo si trova nella sala centrale e inizia a vagare curioso in esplorazione dello straordinario luogo, cambiando sala per 51 volte. Sapendo che una stessa sala potrebbe essere stata visitata più volte, in quante sale si può trovare Bilbo alla fine della perlustrazione?

8. Perduti a Bosco Atro

[35 punti]

Bilbo e i suoi compagni, persi nelle tenebre di Bosco Atro, senza saperlo si trovano sul vertice di un grande triangolo equilatero di lato 1000 metri. Da lì essi seguono il sentiero, che si dirige fino al punto medio del lato opposto e devia quindi verso il punto medio di uno degli altri due lati. Una volta arrivati in quella posizione, la strada gira di 90 gradi e si ricongiunge infine con un tratto di sentiero per cui erano già passati! Quanta strada hanno percorso (in metri) i nani e lo hobbit, dalla partenza fino a quando si rendono conto di trovarsi in un luogo in cui erano già stati?

9. Gli Uomini Neri

[40 punti]

Gli Uomini Neri dopo aver catturato i 13 nani stanno litigando su come cucinarli. Alla fine decidono che almeno uno debba essere arrostito lentamente, almeno due siano schiacciati e ridotti in gelatina, e infine almeno nove vengano tritati finemente e bolliti; la limitata fantasia degli Uomini Neri non consente loro di concepire altre soluzioni culinarie, quindi ognuno dei 13 nani deve essere cucinato in una di queste tre maniere. In quanti modi possono essere cucinati i poveri nani?

N.B.: i nani vanno considerati distinti, quindi una configurazione in cui Thorin viene arrostito e Bombur bollito è diversa da una situazione in cui Bombur viene arrostito e Thorin bollito. (Thorin si offenderebbe parecchio se sapesse che un giovane umano senza barba può anche solo *pensare* di confonderlo con Bombur!)

10. La Montagna Solitaria

[40 punti]

Gandalf, Bilbo e Thorin si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo, in cui l'angolo retto è costituito da Gandalf; quest'ultimo dista 6960 metri da Bilbo e 7308 metri da Thorin. La Montagna Solitaria si trova alla stessa distanza da Bilbo e Thorin, e la sua vetta dista 5046 metri da Gandalf. Quanto è alta al massimo la montagna?

11. Il tesoro di Smaug **[40 punti]**

Il malvagio drago Smaug, sdraiato sul suo immenso tesoro, si accorge che due medaglioni, uno circolare e uno triangolare, hanno questa proprietà: se si sovrappone il primo al secondo è possibile coprire fino a $\frac{14}{25}$ dell'area di quest'ultimo; poggiando invece il medaglione triangolare su quello circolare si può coprire al massimo $\frac{11}{17}$ dell'area del cerchio. Sapendo che il medaglione triangolare ha area 44 cm^2 , quanto vale in mm^2 l'area di quello circolare?

12. Vita da hobbit 2 **[40 punti]**

Gandalf conosce bene Hobbiville e sa che i suoi 2009 abitanti si dividono in tre categorie: alcuni dicono sempre la verità, altri mentono sempre, altri ancora sono sinceri un giorno sì e uno no. Non è detto però che questi ultimi dicano tutti la verità nello stesso giorno. Recentemente lo stregone si è recato a Hobbiville per tre giorni (consecutivi) e ha scelto ogni giorno una domanda da porre a tutti i 2009 hobbit, con i seguenti risultati:

- Alla domanda “Dici sempre la verità?” hanno risposto di sì in 1872 (gli altri hanno risposto di no);
- Alla domanda “Sei uno di quelli che sono sinceri a giorni alterni?” hanno risposto di sì in 853;
- Alla domanda “Domani dirai la verità?” hanno risposto di sì in 1014.

Tuttavia questo non è necessariamente l'ordine esatto con cui Gandalf ha scelto le tre domande. Quanti sono gli hobbit che mentono sempre?

13. Basi orchesche **[45 punti]**

Come è noto, per comodità gli orchi contano in base 238. Qual è il più grande fattore primo del numero orchesco 143? Dare la risposta in base 10.

14. La Battaglia dei Cinque Eserciti **[45 punti]**

Nella Battaglia dei Cinque Eserciti l'alleanza di Nani, Elfi e Uomini combatte le forze congiunte di Orchi e Mannari. Per ogni coppia di questi eserciti, può sussistere una relazione di amicizia, indifferenza o ostilità. Tuttavia non è possibile che due eserciti che combattono tra loro nella battaglia abbiano una relazione di amicizia, né che due eserciti che nella battaglia sono alleati possano avere una relazione di ostilità; due eserciti con una relazione di indifferenza invece possono essere sia alleati sia nemici in battaglia. È noto inoltre che le relazioni di indifferenza sono in minor numero rispetto alle relazioni di amicizia ed ostilità messe assieme. In quanti modi possono essere relazionati tra loro i cinque eserciti?

15. L'Arche Pietra di Thrain**[50 punti]**

L'Arche Pietra, la più splendente gemma del tesoro di Smaug, ha una forma poliedrica. Essa ha 2916 vertici, e in ogni vertice si incontrano 3 spigoli. Quante sono le sue facce?

16. Le due mappe**[50 punti]**

L'antica mappa di Thror ha una forma rettangolare, di lunghezza 2 metri e altezza 1 metro. Gandalf ne possiede una copia più piccola che ha entrambi i lati riscalati di un fattore $\frac{1}{7}$. Immaginando di ruotare la mappa di Gandalf di 90° in senso antiorario e, mantenendo questa orientazione, farne combaciare l'angolo che ora si trova in alto a destra con l'angolo in alto a destra della mappa di Thror, si osserva che la Montagna Solitaria coincide sulle due mappe. Qual è la somma in millimetri di ascissa e ordinata del punto dove si trova la Montagna Solitaria, rispetto ad un'origine posta nel vertice in basso a sinistra della mappa di Thror?

17. Attraverso le miniere**[50 punti]**

Bilbo è alla disperata ricerca dell'uscita dalle miniere di Moria, dove ci sono 274142 stanze, numerate da 1 a 274142. Dalla stanza k è possibile raggiungere la stanza $k + 1$ e la stanza $2k$, ma non viceversa. Bilbo si trova nella stanza 1 e deve arrivare nella 274142, dove si trova l'uscita; Quante stanze diverse (compresa la prima e l'ultima) deve attraversare, come minimo?

18. Strani alloggi**[50 punti]**

Tra le diverse costruzioni in legno della dimora di Beorn, ce n'è una molto particolare. Essa ha la forma di un tetraedro, con la base appoggiata per terra; inoltre immaginando di svilupparla sul terreno, "tagliandola" lungo i tre spigoli che escono dal vertice alto e appiattendolo per terra, si ottiene un quadrato di lato 36 metri. Qual è il volume (in metri cubi) della strana struttura?

19. Il potere degli Istari**[60 punti]**

Gandalf si trova ad un vertice di un enorme salone cubico di lato 200 metri, all'interno delle oscure miniere di Moria. Per salvare i suoi amici, egli lancia una palla di fuoco che rimbalzando sulle pareti finisce infine in un altro vertice della sala, dove incenerisce un malvagio orco. La palla di fuoco rimbalza due volte sul soffitto, sulla parete nord e sulla parete sud, mentre rimbalza una volta sola sul pavimento, sulla parete est e sulla parete ovest. Qual è la lunghezza in metri del suo percorso?

20. La moltitudine di orchi**[60 punti]**

Lo sterminato esercito di orchi si avvicina alla Montagna Solitaria. Thorin nota che il numero di orchi è pari a $x^2 + x + 7763$ per un certo intero positivo x , mentre Bilbo, un altrettanto acuto osservatore, si accorge che tale numero vale $9y^2 + 12y + 1954$ per un certo intero positivo y . Qual è il più grande valore di y per cui questo è possibile?

21. Elfica meticolosità [70 punti]

In attesa dell'inizio della battaglia, 48 guerrieri elfi sono disposti in una formazione rettangolare di dimensioni 12×4 . Ognuno di essi brandisce una spada lunga o un arco; il loro posizionamento è tale che per ogni quadrato 4×4 di soldati più della metà utilizza l'arco, mentre per ogni quadrato 3×3 più della metà combatte con la spada. Inoltre, per proteggere meglio la formazione, almeno due dei quattro angoli del rettangolo sono occupati da guerrieri che brandiscono una spada. In quanti modi potevano disporsi gli elfi, rispettando queste precise condizioni?

22. Barili di contrabbando [70 punti]

Durante la sua esplorazione della dimora degli Elfi Silvani, Bilbo si imbatte in una stanza piena di barili di vino. I primi due barili sono contrassegnati rispettivamente con i numeri 1 e 2; inoltre, detto a_n il numero con cui è contrassegnato l' n -esimo barile, egli nota che per $n \geq 3$

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 1.$$

Incuriosito da questa sequenza di numeri, Bilbo si chiede quale sia il più grande numero primo p per cui a_{p+7} sia multiplo di p . Sapreste aiutarlo?

23. Mosche e ragni [70 punti]

Nell'oscurità di Bosco Atro un enorme ragno ha tessuto un'altrettanto enorme ragnatela che collega tra loro 85 alberi. Una qualunque coppia di alberi (tra questi 85) può essere collegata o meno da un filo. Tale ragnatela è fatta in modo che, presi due qualsiasi alberi non collegati fra loro, ce ne siano esattamente altri 68 collegati ad entrambi; invece presi due qualunque alberi collegati fra loro, ce ne sono esattamente altri 51 collegati ad entrambi. Infine da ogni albero parte lo stesso numero di fili. Quanti sono i fili della ragnatela?

24. Sulla soglia [80 punti]

Bilbo e i suoi compagni si trovano finalmente davanti alla porta segreta della Montagna Solitaria; tuttavia c'è solo un modo per superarla. Detta f una funzione dall'insieme degli interi positivi all'insieme degli interi positivi tale che

- $f(n) = n - f(f(n - 1))$ per ogni $n > 1$;
- $f(1)$ è dispari,

la porta si aprirà solo pronunciando ad alta voce il valore di $f(4198)$.
Quale numero deve dire Bilbo?